

УДК 517.977.52

## ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМОЙ ТИПА РОССЕРА

А.Я.ДЖАББАРОВА

*Бакинский Государственный Университет  
Институт Систем Управления НАНА  
aygun-cabbarova@rambler.ru*

*Рассматривается одна линейная задача оптимального управления гибридной системой типа Россера с линейным критерием качества. Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в форме условия максимума Понтрягина. Отдельно рассмотрен случай выпуклого функционала качества.*

**Ключевые слова:** принцип максимума Понтрягина, формула приращения критерия качества, необходимое и достаточное условие оптимальности, условие оптимальности.

1. Предположим, что управляемый процесс описывается системой линейных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} &= A(t, x)z(t, x) + B(t, x)y(t, x) + f(t, x, u(t, x)), \\ t \in T &= [t_0, t_1], \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \\ y(t, x + 1) &= C(t, x)z(t, x) + D(t, x)y(t, x) + g(t, x, u(t, x)), \quad t \in T, \\ x \in X &= \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\} \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(t_0, x) &= a(x), \quad x \in X \cup x_1, \\ y(t, x_0) &= b(t), \quad t \in T. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $A(t, x)$ ,  $B(t, x)$ ,  $C(t, x)$ ,  $D(t, x)$  – заданные непрерывные по  $t$  при всех  $x$  матричные функции соответствующих размерностей,  $(z(t, x), y(t, x))$  –  $(n + m)$  мерный вектор состояния,  $a(x)$  – заданная дискретная  $n$ -мерная вектор-функция,  $b(t)$  – заданная непрерывная  $m$ -мерная вектор-функция,  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $x_0$ ,  $x_1$  – заданы, причем разность  $x_1 - x_0$  есть

натуральное число,  $f(t, x, u)$  ( $g(t, x, u)$ ) заданная  $n$  ( $m$ )-мерная вектор-функция непрерывная по  $(t, u)$  при всех  $x$ ,  $u = u(t, x)$   $r$ - мерная вектор-функция управляющих воздействий, являющаяся кусочно непрерывной по  $t$  (с конечным числом точек разрыва первого рода) при всех  $x$  со значениями из заданного непустого, ограниченного множества  $U \subset R^r$ , т.е.

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \quad t \in T, \quad x \in X \cup x_1. \quad (3)$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми управлениями.

На решениях системы (1)-(2) порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал

$$S(u) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} c'(x)z(t_1, x) + \int_{t_0}^{t_1} d'(t)y(t, x_1) dt. \quad (4)$$

Здесь  $c(x)$  и  $d(t)$  – заданные  $n$  и  $m$  мерные, соответственно, дискретные и непрерывные вектор-функции.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала (4) при ограничениях (1)-(3).

Допустимое управление, доставляющее минимум функционалу (4) при ограничениях (1)-(3), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс  $(u(t, x), z(t, x), y(t, x))$  – оптимальным процессом.

**2. Построение формулы для приращения функционала качества.** Пусть  $u(t, x)$  фиксированный, а  $\bar{u}(t, x) = u(t, x) + \Delta u(t, x)$  – произвольный – допустимые управления. Через  $(z(t, x), y(t, x))$  и  $(\bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x), \bar{y}(t, x) = y(t, x) + \Delta y(t, x))$  – обозначим соответствующие им решения системы (1)-(2).

Тогда ясно, что

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} c'(x)\Delta z(t_1, x) + \int_{t_0}^{t_1} d'(t)\Delta y(t, x_1) dt. \quad (5)$$

А при этом приращение  $(\Delta z(t, x), \Delta y(t, x))$  состояния  $(z(t, x), y(t, x))$  является решением краевой задачи

$$\frac{\partial \Delta z(t, x)}{\partial t} = A(t, x)\Delta z(t, x) + B(t, x)\Delta y(t, x) + [f(t, x, \bar{u}(t, x)) - f(t, x, u(t, x))], \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Delta y(t, x+1) &= C(t, x)\Delta z(t, x) + D(t, x)\Delta y(t, x) + [g(t, x, \bar{u}(t, x)) - g(t, x, u(t, x))], \\ \Delta z(t_0, x) &= 0, \quad x \in X \cup x_1, \\ \Delta y(t, x_0) &= 0, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть  $p(t, x)$ ,  $q(t, x)$  пока неизвестные, соответственно,  $n$  и  $m$ -мерные вектор-функции. Умножая обе части соотношения (6) ((7)) ска-

лярно на  $p(t, x)$  ( $q(t, x)$ ), а потом интегрируя по  $t$  от  $t_0$  до  $t_1$  и суммируя по  $x$  от  $x_0$  до  $x_1 - 1$  будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t, x) \frac{\partial \Delta z(t, x)}{\partial t} dt = \quad (8)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t, x) [A(t, x) \Delta z(t, x) + B(t, x) \Delta y(t, x) + [f(t, x, \bar{u}(t, x)) - f(t, x, u(t, x))]] dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t, x) \Delta y(t, x+1) dt = \quad (9)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t, x) [C(t, x) \Delta z(t, x) + D(t, x) \Delta y(t, x) + [g(t, x, \bar{u}(t, x)) - g(t, x, u(t, x))]] dt.$$

С учетом (7) получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t, x) \frac{\partial \Delta z(t, x)}{\partial t} dt = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t_1, x) \Delta z(t_1, x) - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial p'(t, x)}{\partial t} \Delta z(t, x) dt, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t, x) \Delta y(t, x+1) dt &= \int_{t_0}^{t_1} q'(t, x_1 - 1) \Delta y(t, x_1) dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t, x-1) \Delta y(t, x) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Введем аналог функции Гамильтона-Понтрягина в виде

$$H(t, x, u, p, q) = p' f(t, x, u) + q' g(t, x, u).$$

С учетом тождеств (8)-(11) формулу (5) для приращения функционала качества (4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(u) &= \sum_{x=x_0}^{x_1-1} c'(x) \Delta z(t_1, x) + \int_{t_0}^{t_1} d'(t) \Delta y(t, x_1) dt + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t_1, x) \Delta z(t_1, x) - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial p'(t, x)}{\partial t} \Delta z(t, x) dt - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t, x) [A(t, x) \Delta z(t, x) + B(t, x) \Delta y(t, x)] dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} q'(t, x_1 - 1) \Delta y(t, x_1) dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t, x-1) \Delta y(t, x) dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t, x) [C(t, x) \Delta z(t, x) + D(t, x) \Delta y(t, x)] dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [H(t, x, \bar{u}(t, x), p(t, x), q(t, x)) - H(t, x, u(t, x), p(t, x), q(t, x))] dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Предположим, что  $p(t, x)$  и  $q(t, x)$  удовлетворяют следующим соотношениям

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = -A'(t, x)p(t, x) - C'(t, x)q(t, x), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} q(t, x-1) &= B'(t, x)p(t, x) + D'(t, x)q(t, x), \\ p(t_1, x) &= -c(x), \\ q(t, x_1-1) &= -d(t). \end{aligned} \quad (14)$$

Задачу (13)-(14) назовем сопряженной системой в задаче управления (1)-(4).

При выполнении (13), (14) формула приращения (12) примет вид  $\Delta S(u) =$

$$= - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [H(t, x, \bar{u}(t, x), p(t, x), q(t, x)) - H(t, x, u(t, x), p(t, x), q(t, x))] dt. \quad (15)$$

**3. Необходимое и достаточное условие оптимальности.** Формула приращения (15) критерия качества (4) позволяет доказать необходимое и достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

**Теорема 1.** Для оптимальности допустимого управления  $u(t, x)$  в задаче (1)-(4) необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\max_{v \in U} H(\theta, \xi, v, p(\theta, \xi), q(\theta, \xi)) = H(\theta, \xi, u(\theta, \xi), p(\theta, \xi), q(\theta, \xi)) \quad (16)$$

выполнялось для всех  $\theta \in [t_0, t_1)$  и  $\xi \in X$ .

Здесь  $\theta \in [t_0, t_1)$  произвольная точка непрерывности управления  $u(t, x)$ .

**Доказательство.** Необходимость. Пусть допустимое управление  $u(t, x)$  оптимальное. Тогда, в силу (15) получаем, что для всех допустимых управлений  $\bar{u}(t, x) \in U$ ,  $t \in T$ ,  $x \in X$  выполняется соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [H(t, x, \bar{u}(t, x), p(t, x), q(t, x)) - H(t, x, u(t, x), p(t, x), q(t, x))] dt \leq 0. \quad (17)$$

В силу произвольности  $\bar{u}(t, x)$  его можно определить следующим образом

$$\bar{u}_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} v, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), x = \xi, \\ u(t, x), & t \in [t_0, t_1] \setminus [\theta, \theta + \varepsilon), x \neq \xi \in X. \end{cases} \quad (18)$$

Здесь  $v \in U$  произвольный вектор,  $\xi \in X$  произвольная точка,  $\theta \in [t_0, t_1)$  произвольная точка непрерывности вектор-функции  $u(t, x)$  по  $t$ , а  $\varepsilon > 0$  произвольное достаточно малое число такое, что  $\theta + \varepsilon < t_1$ .

Принимая во внимание (18) в неравенстве (17) и используя теорему о среднем, приходим к соотношению (16).

**Достаточность.** Теперь предположим, что условие максимума (16) выполняется. Докажем, что  $u(t, x)$  является оптимальным для рассматриваемой задачи. Из условия (16) следует, что для всех  $v = v(\theta, \xi) \in U$

$$H(\theta, \xi, v(\theta, \xi), \psi(\theta, \xi)) - H(\theta, \xi, u(\theta, \xi), \psi(\theta, \xi)) \leq 0. \quad (19)$$

В силу произвольности  $\theta, \varepsilon$  из (19) получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{\xi=x_0}^{x_1-1} [H(\theta, \xi, v(\theta, \xi), \psi(\theta, \xi)) - H(\theta, \xi, u(\theta, \xi), \psi(\theta, \xi))] d\theta \leq 0 \quad (20)$$

для произвольного  $v(\theta, \xi) \in U, \theta \in [t_0, t_1), \xi \in X$ .

С учетом (20) из формулы (15) получаем, что для всех  $v(\theta, \xi) \in U, \theta \in [t_0, t_1), \xi \in X$

$$\begin{aligned} S(v(\theta, \xi)) - S(u(\theta, \xi)) &= \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\xi=x_0}^{x_1-1} [H(\theta, \xi, v(\theta, \xi), \psi(\theta, \xi)) - H(\theta, \xi, u(\theta, \xi), \psi(\theta, \xi))] d\theta \geq 0. \end{aligned}$$

Этим достаточность условия максимума доказано.

**4.** В этом пункте рассматривается задача о минимуме функционала

$$S(u) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \varphi_1(x, z(t_1, x)) + \int_{t_0}^{t_1} \varphi_2(t, y(t, x_1)) dt, \quad (21)$$

при ограничениях

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \quad t \in T, \quad x \in X, \quad (22)$$

$$\frac{\partial z(t, x)}{\partial t} = A(t, x)z(t, x) + B(t, x)y(t, x) + f(t, x, u(t, x)), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} y(t, x+1) &= C(t, x)z(t, x) + D(t, x)y(t, x) + g(t, x, u(t, x)), \\ z(t_0, x) &= a(x), \quad x \in X \cup x_1, \\ z(t, x_0) &= b(t), \quad t \in T. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь  $\varphi_1(x, z)$  ( $\varphi_2(t, y)$ ) – заданная непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $z$  ( $y$ ) скалярная выпуклая по  $z$  ( $y$ ) функция, а остальные данные задачи (21)-(24) удовлетворяют тем ограничениям, которые приведены в п.1.

Пусть  $u(t, x), \bar{u}(t, x) = u(t, x) + \Delta u(t, x)$  допустимые управления.

Через  $(z(t, x), y(t, x))$ , а  $(\bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x), \bar{y}(t, x) = y(t, x) + \Delta y(t, x))$  обозначим соответствующие им решения задачи (21)-(24).

Используя формулу Тейлора приращение функционала качества (21) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial \varphi_1'(x, z(t_1, x))}{\partial z} \Delta z(t_1, x) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \varphi_2'(t, y(t, x_1))}{\partial y} \Delta y(t, x_1) dt + \\ & + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_1(\|\Delta z(t_1, x)\|) + \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta y(t, x_1)\|) dt. \end{aligned} \quad (25)$$

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$M(t, x, u, p, q) = p' f(t, x, u) + q' g(t, x, u).$$

Здесь  $p = p(t, x)$ ,  $q = q(t, x)$  являются решением сопряженной системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, x)}{\partial t} &= -A'(t, x)p(t, x) - C'(t, x)q(t, x), \\ q(t, x+1) &= B'(t, x)p(t, x) + D'(t, x)q(t, x), \\ p(t_1, x) &= -\frac{\partial \varphi_1(x, z(t_1, x))}{\partial z}, \\ q(t, x_1) &= -\frac{\partial \varphi_2(t, y(t, x_1))}{\partial y}. \end{aligned} \quad (26)$$

С учетом (26)-(27), формула (25) приращения функционала качества (21) по аналогии с (12) представляется в форме

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = & -\int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [M(t, x, \bar{u}(t, x), p(t, x), q(t, x)) - M(t, x, u(t, x), p(t, x), q(t, x))] dt + \\ & + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_1(\|\Delta z(t_1, x)\|) + \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta y(t, x_1)\|) dt. \end{aligned} \quad (28)$$

По предположению  $\varphi_1(x, z)$ ,  $(\varphi_2(t, y))$  выпуклая и дифференцируемая по  $z$  ( $y$ ) скалярная функция. Это означает, что  $o_1(\cdot) \geq 0$ ,  $o_2(\cdot) \geq 0$ . Поэтому из формулы приращения (28) следует, что

$$\begin{aligned} \Delta S(u) &= S(\bar{u}) - S(u) \geq \\ &\geq -\int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [M(t, x, \bar{u}(t, x), p(t, x), q(t, x)) - M(t, x, u(t, x), p(t, x), q(t, x))] dt \geq 0. \end{aligned} \quad (29)$$

При помощи этого неравенства доказывается

**Теорема 2.** При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления  $u(t, x)$  в задаче (21)-(24) достаточно, чтобы неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [M(t, x, v(t, x), p(t, x), q(t, x)) - M(t, x, u(t, x), p(t, x), q(t, x))] dt \leq 0$$

выполнялось для всех  $v(t, x) \in U$ ,  $t \in T$ ,  $x \in X$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Мн.: 1974, 272 с.
2. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Понтрягина в теории оптимальных систем. III. // Автоматика и телемеханика. 1959, № 10-12.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Мн.: БГУ, 1973, 256 с.
4. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: БГУ, 2013, 151 с.

### ROSSER TIPLI HİBRİD SİSTEMLƏ BİR XƏTTİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

A.Y. CABBAROVA

#### XÜLASƏ

Məqalədə Rosser tipli hibrid sistemlə təsvir olunan bir xətti optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Artım üsulunun köməyilə Pontryaginın maksimum prinsipi formasında optimallıq üçün zəruri və kafi şərt alınmışdır. Ayrıca olaraq funksionalın qabarıq olduğu hala baxılmışdır.

**Açar sözlər:** Pontryaginın maksimum prinsipi, keyfiyyət meyarının artım düsturu, optimallıq üçün zəruri və kafi şərt, optimallıq şərti.

### ON ONE LINEAR CONTROL PROBLEM OF ROESSER TYPE HYBRID SYSTEMS

A.Y. JABBAROVA

#### SUMMARY

The paper considers one linear control problem described by a Roesser type hybrid system. The necessary and sufficient optimality conditions in the form of the conditions of Pontryagin's maximum principle have been proved.

**Key words:** Pontryagin's maximum principle, necessary and sufficient conditions for optimality, optimality conditions

*Поступила в редакцию: 12.10.2015 г.*

*Подписано к печати: 12.02.2016 г.*